Appendice C

APPROFONDIMENTI RELATIVI ALL'ATMOSFERA STANDARD E ALLA DINAMICA DEI FLUIDI

Determinazione dell'equazione caratteristica dei gas

Lo stato di un gas è definito da tre parametri: la pressione p, il volume V e la temperatura T; al variare di uno di questi parametri variano anche gli altri.

Mantenendone costante uno, si possono avere i seguenti casi:

- per T costante (*trasformazione isotermica*), il prodotto della pressione di un'assegnata massa di gas per il rispettivo volume è costante (legge di Boyle-Mariotte):

$$pV = \text{costante} \tag{1}$$

- per p costante (*trasformazione isobarica*), l'aumento di volume di una massa di gas è indipendente dalla natura del gas e proporzionale al volume iniziale V_0 e all'aumento di temperatura:

$$V - V_0 = \alpha V_0 (t - t_0)$$

  Il coefficiente termometrico α è indipendente dalla temperatura ed uguale a 1/273.16. Per t_0 = 0°C si ha:

$$V = V_0 (1 + \alpha t)$$

  da cui:

$$V = \frac{V_0}{273.16} T \tag{2}$$

  avendo introdotto la temperatura assoluta T. La (2) esprime la prima legge di Volta e Gay-Lussac;

- per V costante (*trasformazione isovolumica* o *isocora*), l'aumento di pressione di una massa di gas è indipendente dalla natura del gas e proporzionale alla pressione iniziale p_0 e all'aumento di temperatura; con procedimento analogo si perviene alla seconda legge di Volta e Gay-Lussac:

$$p = \frac{p_0}{273.16} T \tag{3}$$

Per stabilire una legge generale dei gas si parte da una assegnata massa (una grammomolecola) a 0°C, di volume V_0 e pressione p_0; mantenendo la temperatura costante si porta la pressione da p_0 a p ottenendo:

$$p_0V_0 = pV_1$$

da cui:

$$V_1 = \frac{p_0V_0}{p}$$

Mantenendo p costante, e variando la temperatura da T_0 a T , per la (2) si ha:

$$V = \frac{V_1}{273.16}T$$

e sostituendo a V_1 il valore trovato in precedenza, si ha:

$$V = \frac{p_0V_0}{273.16\,p}T \qquad (4)$$

In tale relazione si trovano compendiate le tre leggi viste in precedenza come è facile mostrare se si pone uno dei tre parametri costanti.

La (4) si può anche porre sotto la forma:

$$pV = R_0T \qquad (5)$$

che rappresenta l'equazione caratteristica dei gas perfetti; R_0 rappresenta il lavoro compiuto da una grammomolecola di gas nell'espansione che accompagna il riscaldamento di 1°C a pressione costante; si ricava dalla relazione:

$$R_0 = \frac{p_0V_0}{273.16} = 8.314\,\text{Joule/°K per mole}$$

avendo posto:

- $p_0 = 0.760 \times 9.806 \times 13.596 \cdot 10^3 = 101325$ Newton/m^2 (o Pascal), essendo p_0 pari alla pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 0.76 m, al livello del mare, a 0°C e alla gravità normale;
- V_0 è il volume occupato, in condizioni normali (0°C, p_0) da una grammomolecola, uguale a $22.415 \cdot 10^{-3}$ m^3.

L'equazione dei gas perfetti scritta per 1 kg di massa assume invece la forma:

$$pV = RT \qquad (6)$$

essendo R riferita non più a una grammomolecola ma all'unità di massa (1 kg); di conseguenza, essendo una grammomolecola di aria pari a $28.964 \cdot 10^{-3}$ kg, si ha:

$$R = \frac{R_0}{28.964 \cdot 10^{-3}} = 287.04\,\text{Joule/kg °K}$$

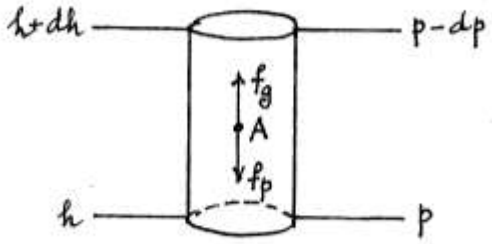
La (6) può essere espressa anche sotto la forma:

$$p = \rho RT \qquad (7)$$

essendo V, volume dell'unità di massa, pari a $1/\rho$, essendo ρ la densità.

Determinazione dell'equazione dell'equilibrio aerostatico

Si ipotizza che la massa d'aria racchiusa in un cilindro di base dS e di altezza dh (compreso tra la quota h e la quota $h+dh$) sia in equilibrio.



Sul baricentro non agiscono forze orizzontali (assenza di vento), mentre le forze che agiscono lungo la verticale si fanno equilibrio. Queste ultime sono:

- la *forza peso* f_p:

$$f_p = mg$$

  dove m rappresenta la massa (uguale al volume $dS \times dh$ per la densità ρ) mentre g è l'accelerazione di gravità (funzione della quota h); si ha quindi:

$$f_p = dS\, dh\, \rho\, g$$

- la *forza dovuta al gradiente di pressione* f_g :

$$f_g = [p - (p - dp)]\, dS = dp\, dS$$

Perché ci sia equilibrio si deve avere:

$$dS\, dh\, \rho\, g + dp\, dS = 0$$

da cui:

$$dp = -\rho\, g\, dh$$

Al posto di g (accelerazione di gravità variabile col la quota h) si sostituisce g_0 (accelerazione di gravità al livello del mare) avendo cura di sostituire a dh l'espressione dH dove H è una nuova quota detta *quota geopotenziale*). Si ha:

$$dp = -\rho\, g_0 dH \qquad (8)$$

La quota geopotenziale H non si discosta eccessivamente dalla quota geometrica h (al limite della troposfera lo scostamento arriva a 17 m); inoltre è sempre $H<h$ (pertanto l'aeromobile verrà a trovarsi sempre ad una quota superiore rispetto a quella geometrica, il che contribuisce ad accrescere la sicurezza).

Determinazione della relazione che lega la pressione *p* con la quota *H*

Dividendo l'equazione dell'equilibrio aerostatico (8) per l'equazione caratteristica dei gas (7), si ottiene:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{R}\frac{dH}{T} \tag{9}$$

Per ridurre il numero di variabili si tiene conto dell'ipotesi di temperatura fatta per la troposfera:

$$dT = -a\,dH$$

da cui:

$$dH = -\frac{1}{a}dT$$

Sostituendo tale espressione nella (9) si ha:

$$\frac{dp}{p} = \frac{g_0}{aR}\frac{dT}{T}$$

Integrando tra il livello del mare ($p = p_0, T = T_0$) e la quota troposferica *H*, si ha:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p} = \frac{g_0}{aR}\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T}$$

da cui si ricava:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{g_0}{aR}\ln\frac{T}{T_0}$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{aR}}$$

Passando dai logaritmi ai numeri si ha:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{aR}}$$

che, tenuto conto che nella troposfera $T = T_0 - aH,$ diventa:

$$p = p_0\left(1-\frac{a}{T_0}H\right)^{\frac{g_0}{aR}} \tag{10}$$

Effetti dovuti alla diminuzione di pressione sull'organismo

Aumentando la quota si è visto come diminuisce la pressione atmosferica; di conseguenza, essendo l'aria un miscuglio di gas, diminuiscono anche le pressioni parziali dei gas componenti (in particolare dell'azoto e dell'ossigeno).

Per esempio, al livello del mare la pressione è di 760 mm (si usano qui i millimetri di mercurio); di conseguenza la pressione parziale dell'ossigeno pO_2 è uguale a circa 160 mm (pari al 21% della pressione totale) mentre quella dell'azoto pN_2 e degli altri gas inerti presenti nell'aria è di circa 600 mm (pari al 79%).

A una quota di 4800 m la pressione atmosferica si riduce a 416 mm dei quali $pO_2 = 87$ mm e $pN_2 = 329$ mm.

Negli alveoli polmonari, preposti allo scambio tra il CO_2 prodotto dall'organismo e l'ossigeno respirato, la composizione dei gas è diversa da quella atmosferica in quanto vi è costante presenza di anidride carbonica e di vapore acqueo in percentuali pressoché costanti. Infatti la pressione del vapore acqueo, funzione della temperatura corporea, è di circa 47 mm mentre la pressione dell'anidride carbonica è di 40 mm al livello del mare ma può ridursi in quota fino a circa 24 mm con l'aumentare dell'attività respiratoria.

La pO_2 del sangue venoso, al suo ingresso nei capillari alveolari, è di appena 40 mm avendo il sangue ceduto una gran parte di ossigeno durante il passaggio lungo i capillari tissutali e pertanto la pO_2 alveolare deve essere sempre maggiore di tale valore per avere un gradiente sufficiente per la cessione di ossigeno da parte degli alveoli.

Pertanto se la pressione atmosferica scende a 300 mm (il che si verifica a circa 7200 mm di quota), di essi 47 mm devono essere riservati, nell'alveolo polmonare, al vapore acqueo e almeno 24 mm all'anidride carbonica sicché resta spazio soltanto per 229 mm dei quali circa quattro quinti per l'azoto e soltanto un quinto, pari a circa 45 mm, per l'ossigeno.

A tale quota, pertanto, un individuo non acclimatato incomincerà a manifestare una crisi di ipossia con possibile perdita della coscienza.

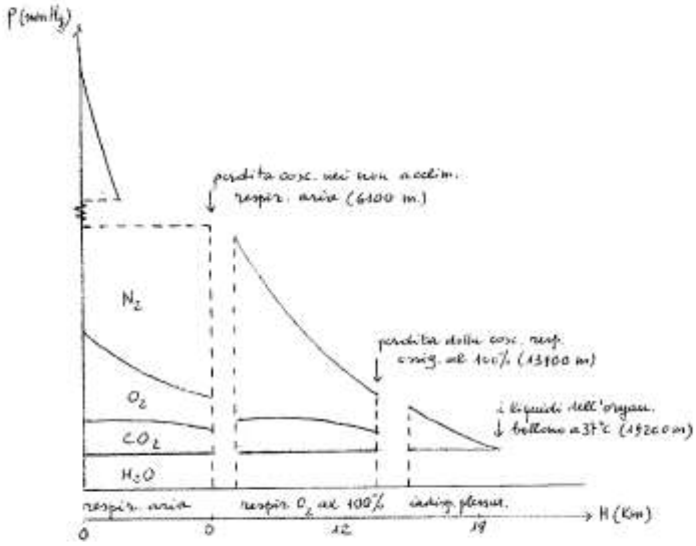
Se, invece, alla stessa quota si respirasse ossigeno al 100%, nell'aria alveolare le pressioni parziali del vapore acqueo e dell'anidride carbonica si manterrebbero costanti rispettivamente a 47 e 40 mm e pertanto i 213 mm restanti risulterebbero a disposizione del solo ossigeno.

È possibile allora raggiungere quote maggiori; infatti a una quota di 13 700 m, alla quale corrisponde una pressione di 111 mm, resterebbe ancora a disposizione per l'ossigeno una pressione di 40 mm (cioè $111 - 47 - 24$).

A quote maggiori sarà necessario, anche respirando ossigeno puro, pressurizzare l'aeromobile e creare all'interno di esso un'atmosfera artificiale rifornita continuamente di ossigeno e dalla quale possa essere rimossa l'anidride carbonica prodotta.

In caso contrario alla quota di 19 200 m, cui corrisponde una pressione di 47 mm, la tensione del vapore eguaglierebbe la pressione esterna e i liquidi dell'organismo andrebbero in ebollizione.

La seguente figura riporta la composizione dell'aria alveolare in funzione della quota respirando aria fino a 6100 m e ossigeno puro tra 6100 e 13 700 m.



Determinazione della relazione che lega la densità con la quota

Si trascrivono qui di seguito le equazioni caratteristiche dei gas per la quota troposferica H e per il livello del mare:

$$p = \rho R T$$

$$p_0 = \rho_0 R T_0$$

che, divise membro a membro, danno:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}$$

da cui:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-1}$$

Sostituendo a p / p_0 l'espressione:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{aR}}$$

si ha:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{aR}-1}$$

da cui, tenendo conto della relazione di temperatura $T = T_0 - aH,$ si ricava:

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{a}{T_0}H\right)^{\frac{g_0}{aR}-1} \qquad (11)$$

Determinazione della quota di pressione *H* e della quota di densità *H′*

Dalla relazione:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{a}{T_0}H\right)^{\frac{g_0}{aR}}$$

elevando primo e secondo membro per $aR / g_0,$ si ha:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{aR}{g_0}} = 1 - \frac{a}{T_0}H$$

da cui si ricava:

$$H = \frac{T_0}{a}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{aR}{g_0}}\right] \qquad (12)$$

La quota di densità si ricava dalle relazioni:

$$p = \rho RT \quad \text{(atmosfera standard)}$$
$$p = \rho' RT' \quad \text{(atmosfera reale)}$$

dove ρ' e T' sono la densità e la temperatura nell'atmosfera reale. Uguagliando le due espressioni, si ha:

$$\rho' = \rho \frac{T}{T'}$$

Sostituendo a ρ e a ρ' le loro espressioni:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} H\right)^{\frac{g_0}{aR}-1} ; \qquad \rho' = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} H'\right)^{\frac{g_0}{aR}-1}$$

si ha:

$$\rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} H'\right)^{\frac{g_0}{aR}-1} = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} H\right)^{\frac{g_0}{aR}-1} \frac{T}{T'}$$

Dividendo per ρ_0, elevando primo e secondo membro per l'inverso di $(g_0 / aR) - 1$ (che è uguale a circa 0.235) si ha:

$$1 - \frac{a}{T_0} H' = \left(1 - \frac{a}{T_0} H\right) \left(\frac{T}{T'}\right)^{0.235}$$

da cui si ricava:

$$H' = \frac{T_0}{a} \left[1 - \left(\frac{T}{T_r}\right)^{0.235} \left(1 - \frac{a}{T_0} H\right)\right] \tag{13}$$

Determinazione dell'equazione di Bernoulli per fluidi incompressibili

Si consideri un fluido ideale (nel nostro caso un gas) in regime stazionario (i parametri del fluido dipendono unicamente dalle coordinate del punto e non dal tempo) nell'ipotesi in cui durante il moto le forze di attrito interno siano nulle.

Con tali ipotesi ciascuna particella di fluido descrive una traiettoria (detta *linea di corrente* o, nel caso di fluido stazionario, *linea di flusso*); in ogni punto la velocità risulta tangente alla traiettoria dell'elemento fluido considerato.

Se dal contorno di una superficie infinitesima *dS*, posta in un punto generico *P* perpendicolarmente alla direzione della corrente, si tracciano le corrispondenti *linee di corrente*, si ottiene un *tubo di flusso*.

Nel punto *P* la pressione, la velocità e la densità del fluido sono, rispettivamente, p, V, ρ.

Dopo un intervallo di tempo infinitesimo *dt* il punto *P* si sposta in P' a una distanza *ds* da *P*; in tale punto la pressione e la velocità diventano $p + dp$ e $V + dV$.

Si fa, inoltre, l'ipotesi che le linee di forza siano pressoché orizzontali.

Il moto del fluido è regolato dalla forza di gradiente di pressione:

$$[(p + dp) - dp]\, dS = dp\, dS$$

che è equilibrata dalla forza d'inerzia uguale al prodotto tra la massa e l'accelerazione a cui è sottoposto il fluido.

La massa è uguale a:

$$\rho\, dS\, ds$$

mentre l'accelerazione è data da:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt} = V\frac{dV}{ds}$$

essendo *ds*/*dt* uguale alla velocità *V*.

Si ha, pertanto:

$$dp dS + \rho\, dS\, ds V\frac{dV}{ds} = 0$$

da cui:

$$dp + \rho V dV = 0 \qquad (14)$$

nota come *equazione di Eulero*.

Se il fluido è incompressibile la densità ρ è costante e l'equazione di Eulero può essere facilmente integrata ottenendo:

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = \text{costante} \qquad (15)$$

Considerando tale equazione per due punti del fluido: il punto 1, corrispondente a una situazione di quiete con $V_1 = V_a$ (TAS) e $p_1 = p_s$ (pressione statica), e il punto

2, corrispondente ad un punto in cui $V_2 = 0$ (punto di arresto del fluido o di *ristagno* dove, di conseguenza, la pressione p_2 acquista il massimo valore p_t), si ottiene:

$$p_s + \frac{1}{2}\rho V_a^{\,2} = p_t \tag{16}$$

da cui si ottiene:

$$p_t - p_s = \frac{1}{2}\rho V_a^{\,2} = q$$

Determinazione dell'equazione di Bernoulli per fluidi compressibili

L'equazione di Eulero deve essere integrata tenendo conto che la densità ρ non è più costante ma è legata alla pressione *p* attraverso la seguente equazione detta di *Laplace*, nell'ipotesi di trasformata adiabatica reversibile di gas perfetto:

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = c$$

dove *c* è una costante. Si ha pertanto:

$$\rho = c^{-\frac{1}{\gamma}}\, p^{\frac{1}{\gamma}}$$

che, sostituita nell'equazione di Eulero scritta nella forma:

$$\frac{dp}{\rho} + VdV = 0$$

si ha:

$$c^{\frac{1}{\gamma}}\, p^{-\frac{1}{\gamma}}\, dp + VdV = 0$$

che, integrata, ci dà:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{costante}$$

La detta espressione rappresenta l'*equazione di Bernoulli per fluidi compressibili*.

Per le applicazioni agli indicatori di velocità è opportuno trasformare tale equazione in funzione della sola pressione; a tal fine, moltiplicando entrambi i membri per la costante $\gamma - 1$, si ha:

$$\gamma\frac{p}{\rho} + \frac{\gamma - 1}{2}V^2 = \text{costante}$$

che diventa, essendo $\gamma p / \rho = s^2$ e $M = V / s$:

$$s^2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=\text{costante} \qquad (17)$$

Esprimendo s^2 in funzione della sola pressione, sostituendo a ρ il valore ricavato in precedenza, si ha:

$$\gamma c^{\frac{1}{\gamma}} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=\text{costante}$$

Elevando tutto per $\gamma/(\gamma-1)$ e semplificando si ottiene:

$$p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\text{costante} \qquad (18)$$

Anche in questo caso, ponendo $M=0$, la costante è uguale alla pressione totale p_t.

Per le applicazioni ai termometri l'equazione di Bernoulli può essere trasformata in funzione di *T*; sostituendo nella (15) a s^2 il valore γRT, si ha:

$$T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=\text{costante} \qquad (19)$$

In questo caso la costante (per $M=0$) è uguale alla temperatura totale T_t.

Correzione alle letture termometriche

La temperatura reale dell'aria esterna T_r (*SAT*) è legata al numero di Mach dalla relazione:

$$T_r\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=\text{costante}$$

dove la costante viene definita in un punto del fluido in cui *M* = 0 (punto di arresto del fluido o punto di ristagno); in detto punto la temperatura raggiunge il massimo valore ed è indicata con T_t o con la sigla *TAT* (*Total Air Temperature*).

Si ha, pertanto:

$$T_r\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=T_t$$

La temperatura letta al termometro è definita con il simbolo T_i o con la sigla *IAT* (*Indicated Air Temperature*); essa, corretta degli eventuali errori strumentali, fornisce la temperatura calibrata o rettificata T_c nota anche con la sigla *RAT* (*Rectified Air Temperature*).Quest'ultima temperatura è sempre inferiore alla temperatura T_t in quanto il sensore termometrico non è mai posto esattamente in un punto di ristagno. Di conseguenza la relazione precedente diventa:

$$T_r\left(1+C_T\,\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)=T_c$$

dove, essendo $T_c<T_t$, è stato introdotto un coefficiente $C_T<1$ in modo da rispettare l'uguaglianza. Il coefficiente introdotto è definito *fattore di recupero del termometro* (*Recovery Factor*) e varia da velivolo a velivolo. Sugli aerei a bassa velocità C_T varia da 0.70 a 0.85 mentre sugli aerei forniti di sonda il fattore di recupero varia da 0.95 a 1.00 raggiungendo tale ultimo valore nel caso in cui la misura di temperatura venga effettuata in un punto di arresto del fluido.

Dalla relazione precedente si ricava la differenza $\Delta T=T_r-T_c$ che rappresenta la correzione da apportare alla temperatura rettificata per avere la temperatura reale; essa è data da:

$$\Delta T=-C_T\,T_r\,\frac{\gamma-1}{2}M^2$$

la quale, sostituendo M con V_a/s ed s con $20.05\sqrt{T_r}$, diventa:

$$\Delta T=-kC_T\,{V_a}^2$$

essendo k una costante uguale a 0.000132 nel caso in cui la velocità dell'aeromobile venga espressa in nodi.

Determinazione della temperatura media

Nella troposfera si è fatta l'ipotesi che la temperatura diminuisce linearmente con la quota. Se, invece, si ipotizza che tra il livello del mare e una quota generica H vi sia una temperatura costante, sempre nell'ipotesi di uguale variazione di pressione tra la colonna d'aria a temperatura variabile e quella a temperatura costante, l'espressione:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{g_0}{R}\frac{dH}{T}$$

si può scrivere:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{g_0}{RT_m}dH \tag{20}$$

dove con T_m si è indicata la temperatura costante.

Integrando ciascuna delle due espressioni, e uguagliando, si ha:

$$-\frac{g_0}{R}\int_0^H \frac{dH}{T} = -\frac{g_0}{RT_m}\int_0^H dH$$

dove nel primo integrale si può porre $dH = -(1/a)dT$; pertanto:

$$\frac{1}{a}\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = -\frac{1}{T_m}\int_0^H dH$$

da cui si ricava:

$$T_m = \frac{aH}{\ln\left(\frac{T_0}{T}\right)} \tag{21}$$

Integrando, invece, la (18), si può ricavare:

$$T_m = \frac{g_0 H}{R\ln\left(\frac{p_0}{p}\right)} \tag{22}$$

Per H = 4000 m si ricava da ciascuna delle due espressioni T_m = 274.96.

Il termine T_m è anche detto *temperatura media* in quanto, con buona approssimazione, si può ricavare effettuando la media tra la temperatura al livello del mare (288.16 °K) e quella alla quota H (nell'esempio 262.16 °K). Si ricava il valore 275.16 °K.

Relazione tra pressione d'impatto e pressione dinamica

Si definisce *pressione d'impatto* la differenza tra la pressione totale p_t (prelevata nel punto di arresto del fluido attraverso la presa d'impatto) e la pressione statica p_s (prelevata dalle prese statiche).

Si definisce, invece, *pressione dinamica* l'espressione:

$$\frac{1}{2}\rho V_a{}^2$$

Per i fluidi incompressibili essendo, come si è visto:

$$p_s + \frac{1}{2}\rho V_a{}^2 = p_t$$

si ha che la pressione d'impatto è uguale alla pressione dinamica.

Per i fluidi compressibili si considera l'espressione:

$$p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\text{costante}$$

che riferita a un punto in quiete $(p = p_s)$ e a un punto di arresto $(M = 0,\ p = p_t)$ diventa:

$$p_s\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=p_t$$

che si può scrivere:

$$\frac{p_t}{p_s}=\frac{p_t-p_s}{p_s}+1=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

da cui:

$$\frac{p_t-p_s}{p_s}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1 \tag{23}$$

Il termine in parentesi si può sviluppare in serie binomiale attraverso la relazione:

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+\cdots$$

avendo posto:

$$x=\frac{\gamma-1}{2}M^2;\quad n=\frac{\gamma}{\gamma-1}$$

La serie è convergente quando $x < 1$ il che si verifica quando il numero di Mach è minore di uno (regime sub-sonico).

Effettuando le sostituzioni e le dovute semplificazioni si ha:

$$\binom{n}{1}x=nx=\frac{\gamma}{2}M^2$$

$$\binom{n}{2}x^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2=\frac{\gamma}{8}M^4$$

$$\binom{n}{3}x^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3=\frac{\gamma(2-\gamma)}{48}M^6$$

$$\binom{n}{4}x^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4=\frac{\gamma(2-\gamma)(3-2\gamma)}{384}M^8$$

Di conseguenza si ha:

$$\frac{p_t - p_s}{p_s} = \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 + \frac{\gamma(2-\gamma)(3-2\gamma)}{384} M^8 + \cdots$$

Mettendo in evidenza il primo termine del secondo membro, si ha:

$$\frac{p_t - p_s}{p_s} = \frac{\gamma}{2} M^2 \left[1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24} M^4 + \frac{(2-\gamma)(3-2\gamma)}{192} M^6 + \cdots \right]$$

Sostituendo a γ il valore 1.4, si ricava:

$$p_t - p_s = \frac{\gamma p_s M^2}{2} (1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \frac{M^6}{1600} - \cdots)$$

Considerando la relazione che definisce la velocità del suono ($s^2 = \gamma\, p_s / \rho$) e che $M = V_a / s$:

$$p_t - p_s = \frac{1}{2} \rho V_a^{\,2} (1 + \frac{M^2}{4} + \frac{M^4}{40} + \frac{M^6}{1600} - \cdots) \qquad (24)$$

che rappresenta la relazione che lega la pressione d'impatto con la pressione dinamica per i fluidi compressibili in regime sub-sonico (relazione di St. Venant).

Si vede che per $M < 0.2$ si può trascurare il termine $M^2/4$ (e a maggior ragione i successivi) e pertanto il fluido può essere considerato incompressibile fino a velocità $M = 0.2$.

Determinazione della correzione per la compressibilità

Quando la velocità dell'aeromobile è elevata ($0.2 < M < 1$) il fluido non si può più considerare incompressibile e, pertanto, la relazione (16) non può essere utilizzata.

È necessario calcolare la velocità V_a dalla (23). Dopo aver sostituito a M^2 il rapporto tra $V_a^{\,2}$ e $s^2 = \gamma p_s / \rho$, si ottiene:

$$V_a = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_s}{\rho} \left[\left(\frac{p_t - p_s}{p_s} + 1 \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \qquad (25)$$

Si noti che, a differenza del caso di bassa velocità, la velocità all'aria è funzione non soltanto della pressione d'impatto $p_t - p_s$ e della densità, ma anche della pressione statica p_s.

Per tarare l'indicatore di velocità è necessario considerare i valori di pressione e di densità costanti (nel caso in esame quelli relativi al livello del mare) ottenendo:

$$V_c = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p_t - p_s}{p_0}+1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} \tag{26}$$

dove con V_c è indicata la velocità calibrata.

Se in quest'ultima relazione si sostituisce a p_0 p_s si ottiene:

$$V_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_s}{\rho_0}\left[\left(\frac{p_t - p_s}{p_s}+1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]} \tag{27}$$

dove V_e è definita *velocità equivalente*.

Il vantaggio che si consegue introducendo tale velocità è che da essa si può passare alla V_a con la stessa relazione usata per gli indicatori per basse velocità:

$$V_a = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}V_e$$

come può vedersi dividendo la (25) per la (27).

La velocità equivalente è legata alla velocità calibrata dalla relazione:

$$\Delta V_c = V_c - V_e = V_c(1 - V_e / V_c)$$

che, attraverso le (26) e (27), diventa:

$$\Delta V_c = V_c\left[1 - \sqrt{\frac{p_s}{p_0}\frac{\left(\frac{p_t - p_s}{p_s}+1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\left(\frac{p_t - p_s}{p_0}+1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}}\right] \tag{28}$$

Il numeratore posto sotto radice, per la (16), diventa:

$$\frac{\gamma-1}{2}M^2$$

mentre il denominatore, sempre per la (16), diventa:

$$\left[\frac{p_s}{p_0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\left(1-\frac{p_s}{p_0}\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1$$

Ponendo: $p_s / p_0 = \delta$; $M^2 = V_a^2 / s^2 = V_e^2 / \sigma s^2 \cong V_c^2 / \sigma s^2$ la (28) assume la forma:

$$\Delta V_c = V_c \left[1 - \sqrt{\frac{\frac{(\gamma-1)\delta}{2\sigma s^2} V_c^2}{\left[\delta\left(1+\frac{\gamma-1}{2\sigma s^2}V_c^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+(1-\delta)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}} \right] \qquad (29)$$

dove, essendo s^2, σ, δ funzioni della quota di pressione *H*, si ha che ΔV_c è funzione unicamente di tale quota e della velocità calibrata V_c.

La (29) non è una relazione esatta a causa dell'approssimazione fatta ($V_e \cong V_c$). Per ottenere valori esatti sarebbe necessario risolvere la (29) in modo da ricavare un valore approssimato di V_e e ripetere nuovamente il calcolo di ΔV_c utilizzando la V_e ricavata al posto di V_c. È sufficiente una sola iterazione.

Con tale procedimento è possibile costruire un diagramma o la seguente tabella di correzione nella quale i valori omessi non sono riportati in quanto la velocità dell'aeromobile raggiungerebbe valori per cui $M > 1$.

	Quote di pressione						
V_c	5000	10000	15000	20000	25000	30000	35000
150	0.2	0.4	0.7	1.1	1.6	2.2	2.9
200	0.4	1.0	1.7	2.5	3.6	4.9	6.6
250	0.8	1.9	3.2	4.8	6.7	9.1	12.1
300	1.4	3.2	5.3	7.9	11.1	14.9	19.4
350	2.2	4.9	8.2	12.0	16.7	22.1	28.4
400	3.2	7.1	11.7	17.1	23.5	–	–
450	4.5	9.8	16.0	23.2	–	–	–
500	5.9	12.9	20.9	–	–	–	–